Concursul Interjudeţean de Matematică ”Grigore C. Moisil”
Ediţia a XXXIV-a, Baia Mare, 5 – 7 aprilie 2019

Clasa a X-a

Problema 1. Arătaţi că oricare ar fi $m, n \in \mathbb{N}^*$ numărul $a = 2n(n+1)$ divide numărul

$$b = (n+1)^{2m} + n^{2m} - 1.$$

Ovidiu T. Pop

Barem

Avem $b = (n+1)^{2m} + (n^2 - 1)(n^{2m-2} + n^{2m-4} + \ldots + n^2 + 1) = n(n+1) \cdot B_n$
cu $B_n = \left(C_{2m-1}^0 + 1\right) n^{2m-2} + \left(C_{2m-1}^1 - 1\right) n^{2m-3} + \ldots + \left(C_{2m-1}^{2m-2} + 1\right)$ .... 2 puncte

Pentru n par, $C_{2m-1}^{2m-2} + 1 = C_{2m-1}^1 + 1 = 2m$, deci $2|B_n$ .... 2 puncte

Pentru n impar, avem $n = M_2 + 1$, deci
$B_n = M_2 + \left(C_{2m-1}^0 + 1\right) + \left(C_{2m-1}^1 - 1\right) + \ldots + \left(C_{2m-1}^{2m-2} + 1\right) = M_2 + 2^{2m-1}$, deci $2|B_n$ .... 2 puncte

Deci $2|B_n \forall n \in \mathbb{N}$, şi atunci $a|b$ .... 1 punct

Concursul Interjudeţean de Matematică "Grigore C. Moisil"
Ediţia a XXXIV-a, Baia Mare, 5 – 7 aprilie 2019

Clasa a X-a

Problema 2. Fie $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 3$. Rezolvaţi sistemul

$$\begin{cases} 2^{x_1} + 3^{x_1} = 2 + 3x_2 \\ 2^{x_2} + 3^{x_2} = 2 + 3x_3 \\ \vdots \\ 2^{x_{n-1}} + 3^{x_{n-1}} = 2 + 3x_n \\ 2^{x_n} + 3^{x_n} = 2 + 3x_1 \end{cases}$$

Nicolae Muşuroia & Dan Bărbosu

Barem

Dacă $x_i \leq x_{i+1}$, $i = \overline{1, n-1}$, atunci $2^{x_{n-1}} + 3^{x_{n-1}} \leq 2^{x_n} + 3^{x_n}$
$\Rightarrow 3x_n + 2 \leq 3x_1 + 2 \Rightarrow x_n \leq x_1$ .... 2 puncte
deci $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$ .... 2 puncte

Sistemul revine la
$2^{x_1} + 3^{x_1} = 3x_1 + 2$ .... 1 punct

Membrul stâng al ecuaţiei este o funcţie convexă,
iar membrul drept este o funcţie de gradul I, deci ecuaţia are cel mult două soluţii
$x_1 \in \{0, 1\}$ .... 1 punct

$S = \{(0, 0, \ldots, 0), (1, 1, \ldots, 1)\}$ .... 1 punct

Concursul Interjudeţean de Matematică "Grigore C. Moisil"
Ediţia a XXXIV-a, Baia Mare, 5 – 7 aprilie 2019

Clasa a X-a

Problema 3. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \setminus \{0,1\} \to \mathbb{R}$ care verifică relaţia

$$f(x) + f\left(1 - \frac{1}{x}\right) = \operatorname{arctg} x,\ \forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}.$$

Arătaţi că funcţia $g : \mathbb{R} \setminus \{0,1\} \to \mathbb{R}$ pentru care $g\,(x) = f(x) + f(1-x)$ pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$, este constantă pe fiecare dintre intervalele $(-\infty, 0)$, $(0,1)$, $(1,\infty)$.

Vasile Pop

Barem

Considerăm funcţia

$$g : \mathbb{R} \setminus \{0,1\} \to \mathbb{R} \setminus \{0,1\},\ g(x) = 1 - \frac{1}{x},$$

pentru care observăm că

$$g^2(x) = g(g(x)) = \frac{1}{1-x} \quad \text{şi} \quad g^3(x) = x,\ \forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}.$$

. . . . 2 puncte

Din relaţia dată obţinem:

$$f(x) + f(g(x)) = \operatorname{arctg} x \tag{1}$$

$$f(g(x)) + f(g^2(x)) = \operatorname{arctg} g(x) \tag{2}$$

$$f(g^2(x)) + f(x) = \operatorname{arctg} g^2(x) \tag{3}$$

Din $(1) + (3) - (2)$ obţinem:

$$2f(x) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} g^2(x) - \operatorname{arctg} g(x)$$

$$= \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1-x}{x} + \operatorname{arctg} \frac{1}{1-x},\ \forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\} \tag{4}$$

Din (4) obţinem:

$$2f(1-x) = \operatorname{arctg}(1-x) + \operatorname{arctg} \frac{x}{1-x} + \operatorname{arctg} \frac{1}{x},\ \forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\} \tag{5}$$

. . . . 2 puncte

Din (4) şi (5) obţinem:

$$2(f(x) + f(1-x)) = \left(\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x}\right) + \left(\operatorname{arctg}(1-x) + \operatorname{arctg} \frac{1}{1-x}\right) + \left(\operatorname{arctg} \frac{1-x}{x} + \operatorname{arctg} \frac{x}{1-x}\right)$$

$$= \begin{cases} -\dfrac{\pi}{2}, & x \in (-\infty, 0) \\ \dfrac{3\pi}{2}, & x \in (0,1) \\ \dfrac{\pi}{2}, & x \in (1,\infty) \end{cases}$$

deoarece

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}, & x > 0 \\ -\dfrac{\pi}{2}, & x < 0 \end{cases}$$

. . . . 3 puncte

Concursul Interjudeţean de Matematică "Grigore C. Moisil"
Ediţia a XXXIV-a, Baia Mare, 5 – 7 aprilie 2019

Clasa a X-a

Problema 4. Fie funcţia convexă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi triunghiul ABC. Fie $D \in (BC)$, $E \in (AC)$, $F \in (AB)$ şi $AD \cap BE \cap CF = \{P\}$ cu $P \in Int\,(ABC)$.
a) Arătaţi că

$$\sum \frac{DP}{AD} \cdot f\left(\frac{AD}{DP}\right) \geq f\,(3) \text{ şi } \sum \frac{AP}{AD} \cdot f\left(\frac{AD}{AP}\right) \geq 2f\left(\frac{3}{2}\right).$$

b) Demonstraţi că

$$\sum \left(1 + \frac{b+c}{a}\right)^n \geq 3^{n+1} \text{ şi } \sum \frac{1}{(b+c)^n} \geq \frac{3^{n+1}}{2^n} \cdot \frac{1}{(a+b+c)^n},$$

unde a, b şi c sunt lungimile laturilor triunghiului ABC şi $n \in \mathbb{N}^*$.

Gheorghe Râmbu

Barem
a) Fie $S = \mathcal{A}_{ABC}$, $a = \mathcal{A}_{BPC}$, $b = \mathcal{A}_{CPA}$ şi $c = \mathcal{A}_{APB}$, atunci $S = a + b + c$

şi $\dfrac{PD}{AD} = \dfrac{a}{S}$, $\dfrac{PE}{BE} = \dfrac{b}{S}$, $\dfrac{PF}{CF} = \dfrac{c}{S}$, deci $\sum \dfrac{PD}{AD} = 1$

$1 - \dfrac{PD}{AD} + 1 - \dfrac{PE}{BE} + 1 - \dfrac{PF}{CF} = 2$, deci $\sum \dfrac{AP}{2 \cdot AD} = 1$ .... 3 puncte

f convexă implică $\sum \dfrac{PD}{AD} \cdot f\left(\dfrac{AD}{PD}\right) \geq f\left(\sum \dfrac{PD}{AD} \cdot \dfrac{AD}{PD}\right) = f\,(3)$

şi $\sum \dfrac{1}{2}\dfrac{AP}{AD} f\left(\dfrac{AD}{AP}\right) \geq f\left(\sum \dfrac{1}{2}\dfrac{AD}{AP}\dfrac{AP}{AD}\right) = f\left(\dfrac{3}{2}\right)$ adică $\sum \frac{AP}{AD} \cdot f\left(\frac{AD}{AP}\right) \geq 2f\left(\frac{3}{2}\right)$ .... 3 puncte

b) Dacă se alege $P = I$ punctul de intersecţie al bisectoraelor şi $f\,(x) = x^{n+1}$,

atunci $\dfrac{AP}{PD} = \dfrac{b+c}{a}$, $\dfrac{PD}{AD} = \dfrac{a}{a+b+c}$ şi analoagele şi se obţin inegalităţile cerute. .... 1 punct