**Concursul Interjudeţean de Matematică ”Grigore C. Moisil”**
**Ediţia a XXXIV-a, Baia Mare, 5 – 7 aprilie 2019**

**Clasa a XI-a**

**Problema 1.** Calculaţi

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n!)^{p+1}}{(pn)!}\right)^{\frac{1}{n}}\left(\frac{p\left(\sqrt[n]{p}-1\right)+1}{\sqrt[n]{n}}\right)^{n},$$

unde $p\geq 2$ este un număr întreg.

Dorel I. Duca

**Barem**

Evident, pentru fiecare $n\in\mathbb{N}^*$, avem

$$\left(\frac{(n!)^{p+1}}{(pn)!}\right)^{\frac{1}{n}}\left(\frac{p\left(\sqrt[n]{p}-1\right)+1}{\sqrt[n]{n}}\right)^{n}=\left(\frac{(n!)^{p+1}}{(pn)!n^n}\right)^{\frac{1}{n}}\left(p\left(\sqrt[n]{p}-1\right)+1\right)^{n}.$$

.............................................................................................. 1 punct

Deoarece, în baza teoremei lui Cesaro-Stolz,

$$\lim_{n\to\infty}\ln\left(\frac{(n!)^{p+1}}{(pn)!n^n}\right)^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(p+1)\ln n!-n\ln n-\ln (pn)!}{n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[(p+1)\ln (n+1)-(n+1)\ln (n+1)+n\ln n-\ln (pn+p)!+\ln (pn)!\right]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\ln\frac{(n+1)^p}{(pn+1)\,(pn+2)\ldots(pn+p)}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n}=\ln\frac{1}{ep^p}$$

obţinem că

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n!)^{p+1}\,n^n}{(pn)!}\right)^{\frac{1}{n}}=\frac{1}{e\cdot p^p}.$$

.............................................................................................. 3 puncte

Pe de altă parte,

$$\lim_{n\to\infty}\left(p\left(\sqrt[n]{p}-1\right)+1\right)^{n}=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1+p\left(\sqrt[n]{p}-1\right)\right)^{\frac{1}{p\left(\sqrt[n]{p}-1\right)}}\right\}^{np\left(\sqrt[n]{p}-1\right)}=$$

$$=\mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{p\left(\sqrt[n]{p}-1\right)}{\frac{1}{n}}}=\mathrm{e}^{p\ln p}=p^p,$$

.............................................................................................. 2 puncte

şi atunci

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n!)^{p-1}}{(pn)!}\right)^{\frac{1}{n}}\left(\frac{p\left(\sqrt[n]{p}-1\right)+1}{\sqrt[n]{n}}\right)^{n}=\frac{1}{e\cdot p^p}p^p=\frac{1}{e}.$$

.............................................................................................. 1 punct

**Concursul Interjudeţean de Matematică "Grigore C. Moisil"**
**Ediţia a XXXIV-a, Baia Mare, 5 – 7 aprilie 2019**

**Clasa a XI-a**

**Problema 2.** Fie $p, q \in (0, \infty)$ cu $pq < 1$ şi fie şirurile $(x_n)_{n\geq 1}$, $(y_n)_{n\geq 1}$, pentru care

$$0 \leq x_{n+2} - x_n \leq p^{2n+4} + q^{2n+4}, \ \ n \geq 1$$

$$y_n = \frac{p^{2n} + p^{2n-2}q^2 + p^{2n-4}q^4 + \ldots + p^2 q^{2n-2} + q^{2n}}{p^n \cdot q^n}, \ \ n \geq 1.$$

Calculaţi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n}.$$

Andrei Horvat-Marc

**Barem** Fie $n \in \mathbb{N}^*$ un rang par, adică există $k \in \mathbb{N}^*$ astfel ca $n = 2k$. Atunci

$$y_n = \left(\frac{p^n}{q^n} + \frac{q^n}{p^n}\right) + \left(\frac{p^{n-2}}{q^{n-2}} + \frac{q^{n-2}}{p^{n-2}}\right) + \ldots \left(\frac{p^2}{q^2} + \frac{q^2}{p^2}\right) + 1.$$

Cum $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$ oricare ar fi $x, y \in (0, \infty)$, se obţine
$y_{2k} \geq 2 \cdot k + 1 = n + 1$, oricare ar fi $k \geq 1$. .................................... 0,5 puncte

Fie $n \in \mathbb{N}^*$ un rang impar, adică există $k \in \mathbb{N}^*$ astfel ca $n = 2k+1$. Atunci

$$y_n = \left(\frac{p^n}{q^n} + \frac{q^n}{p^n}\right) + \left(\frac{p^{n-2}}{q^{n-2}} + \frac{q^{n-2}}{p^{n-2}}\right) + \ldots \left(\frac{p^3}{q^3} + \frac{q^3}{p^3}\right) + \left(\frac{p}{q} + \frac{q}{p}\right).$$

Cum $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$ oricare ar fi $x, y \in (0, \infty)$, se obţine
$y_{2k+1} \geq 2 \cdot \frac{2k+2}{2} = n + 1$, oricare ar fi $k \geq 0$. .................................... 0,5 puncte

În concluzie, $y_n \geq n + 1$ oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$, deci şirul $(y_n)_{n\geq 1}$ este nemărginit superior şi

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \infty.$$

.................................................................................................... 1 punct

Pentru subşrirurile de rang par, i.e. $(x_{2n})_{n\geq 1}$, $(y_{2n})_{n\geq 1}$, avem

$$y_{2n+2} - y_{2n} = \frac{p^{2n+2}}{q^{2n+2}} + \frac{q^{2n+2}}{p^{2n+2}} = \frac{p^{4n+4} + q^{4n+4}}{(pq)^{2n+2}}, \ \ n \geq 1.$$

şi

$$\frac{x_{2n+2} - x_{2n}}{y_{2n+2} - y_{2n}} \leq \left(p^{4n+4} + q^{4n+4}\right) \cdot \left(\frac{p^{4n+4} + q^{4n+4}}{(pq)^{2n+2}}\right)^{-1} = (pq)^{2n+2}.$$

Cum $pq < 1$, se obţine

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} \frac{x_{2n+2} - x_{2n}}{y_{2n+2} - y_{2n}} \leq 0,$$

deci, conform teoremei Stolz-Cesaro, rezultă

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{2n}}{y_{2n}} = 0.$$

.................................................................................................... 2 puncte

Pentru subşirurile de rang impar, i.e. $(x_{2n+1})_{n\geq 1}$, $(y_{2n+1})_{n\geq 1}$, avem

$$y_{2n+3} - y_{2n+1} = \frac{p^{2n+3}}{q^{2n+3}} + \frac{q^{2n+3}}{p^{2n+3}} = \frac{p^{4n+6} + q^{4n+6}}{(pq)^{2n+3}}, \ \ n \geq 1.$$

şi

$$\frac{x_{2n+3} - x_{2n+1}}{y_{2n+3} - y_{2n+1}} \leq \left(p^{4n+6} + q^{4n+6}\right) \cdot \left(\frac{p^{4n+6} + q^{4n+6}}{(pq)^{2n+3}}\right)^{-1} = (pq)^{2n+3}.$$

Cum $pq < 1$, se obţine

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} \frac{x_{2n+3} - x_{2n+1}}{y_{2n+3} - y_{2n+1}} \leq 0,$$

deci, conform teoremei Stolz-Cesaro, rezultă

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{2n+1}}{y_{2n+1}} = 0.$$

.................................................................................................. 2 puncte

În final, deoarece

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{2n}}{y_{2n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{2n+1}}{y_{2n+1}} = 0,$$

deducem că

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = 0.$$

.................................................................................................. 1 punct

**Concursul Interjudeţean de Matematică "Grigore C. Moisil"**
**Ediţia a XXXIV-a, Baia Mare, 5 – 7 aprilie 2019**

## Clasa a XI-a

**Problema 3.** Fie $n, p, q \in \mathbb{N}$ astfel încât $1 \le q < p < n$. Dacă există $A \in \mathcal{M}_n(\{0,1\})$ astfel încât matricea $A \cdot A^t$ are toate elementele de pe diagonala principală egale cu $p$ şi celelalte elemente egale cu $q$, arătaţi că:

a) $p(p-1) = q(n-1)$;

b) $A \cdot A^t = A^t \cdot A$;

Mircea Rus

**Barem** Fie $A = (a_{ij})$ şi $B = A \cdot A^t = (b_{ij})$.

Are loc

$$p = b_{ii} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \quad \text{pentru orice } i \in \{1, 2, \ldots, n\},$$

deci $AU = pU$, unde $U$ vectorul coloană de ordin $n$ cu toate elementele egale cu 1. Notăm mai departe cu $J_n$ matricea de dimensiune $n \times n$ cu toate elementele egale cu 1, astfel rezultă că

$$A \cdot J_n = pJ_n \tag{1}$$

.................................................................................................... 1 punct

şi, prin ipoteză,

$$A \cdot A^t = (p-q)I_n + qJ_n. \tag{2}$$

Din (1) şi (2) rezultă

$$A \cdot A^t = (p-q)I_n + \frac{q}{p} A \cdot J_n,$$

deci

$$\frac{1}{p-q} A \cdot \left( A^t - \frac{q}{p} J_n \right) = I_n$$

.................................................................................................... 1 punct

ce arată că $A^t - \frac{q}{p} J_n$ este inversa matricei $\frac{1}{p-q} A$, astfel ele comută:

$$\left( A^t - \frac{q}{p} J_n \right) \cdot \frac{1}{p-q} A = I_n. \tag{3}$$

.................................................................................................... 1 punct

Înmulţind la dreapta în (3) cu $(p-q)J_n$, rezultă pe baza lui (1) că

$$\left( A^t - \frac{q}{p} J_n \right) pJ_n = (p-q)J_n$$

şi, ţinând cont că $J_n^2 = nJ_n$, obţinem

$$A^t \cdot J_n = \frac{p-q+qn}{p} J_n. \tag{4}$$

.................................................................................................... 1 punct

Din (4), suma $\Sigma$ a tuturor elementelor lui $A^t \cdot J_n$ este $\dfrac{p-q+qn}{p} \cdot n^2$. În acelaşi timp, din (1) rezultă că $\Sigma = pn^2$, deci $\dfrac{p-q+qn}{p} \cdot n^2 = pn^2$, care conduce în final la (a):

$$p(p-1) = q(n-1). \tag{5}$$

........................................................................................ 1 punct

Mai departe, folosind (5), putem rescrie (4) sub forma

$$A^t \cdot J_n = pJ_n,$$

deci

$$J_n \cdot A = pJ_n. \tag{6}$$

Mai departe, din (3),

$$A^t \cdot A - \frac{q}{p} J_n \cdot A = (p-q)I_n,$$

deci, pe baza lui (6) şi (2),

$$A^t \cdot A = \frac{q}{p} J_n \cdot A + (p-q)I_n = qJ_n + (p-q)I_n = A \cdot A^t,$$

aşadar rezultă (b). ................................................................... 2 puncte

**Concursul Interjudeţean de Matematică ”Grigore C. Moisil”**
**Ediţia a XXXIV-a, Baia Mare, 5 – 7 aprilie 2019**

**Clasa a XI-a**

**Problema 4.** Pentru o matrice coloană $X = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^t \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{Z})$ notăm cu $f(X)$ cel mai mic multiplu comun al numerelor $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Determinaţi matricele $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ cu proprietatea

$$f(X) = f(A \cdot X),\ \forall\ X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{Z}).$$

Vasile Pop

**Barem** Vom arăta că matricele $A$ sunt cele care au doar $n$ elemente nenule, egale cu 1 sau $-1$, câte unul pe fiecare linie şi pe fiecare coloană (în total $n! \cdot 2^n$ matrice).

Fie $A = [a_{ij}]_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ şi pentru $X = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^t$,

$$A \cdot X = Y,\ Y = [y_1, y_2, \ldots, y_n]^t,\ \text{unde } y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j.$$

Din relaţia $f(X) = f(Y)$ obţinem condiţia

$$x \overset{not}{=} \text{c.m.m.m.c.}\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} = \text{c.m.m.m.c.}\{y_1, y_2, \ldots, y_n\} \overset{not}{=} y.$$

• Dacă luăm $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 1$ obţinem $x = 1$ deci

$$1 = y = \text{c.m.m.m.c.}\{L_1, L_2, \ldots, L_n\},$$

unde $L_i = a_{i1} + a_{i2} + \ldots + a_{in}$ este suma elementelor de pe linia $i$, $i = \overline{1,n}$. Rezultă, astfel că $L_i \in \{-1, 1\}$, deci pe fiecare linie avem cel puţin un element nenul. .......................................... 2 puncte

• Dacă luăm $x_1 = -1$, $x_2 = \ldots = x_n = 1$ obţinem $x = 1$, deci

$$1 = y = \text{c.m.m.m.c.}\{-2a_{11} + L_1, -2a_{21} + L_2, \ldots, -2a_{n1} + L_n\}$$

astfel că

$$-2a_{11} + L_1, \ldots, -2a_{n1} + L_n \in \{-1, 1\}.$$

Folosind că $L_i \in \{-1, 1\}$ pentru orice $i = \overline{1,n}$, rezultă $a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{n1} \in \{-1, 0, 1\}$. ............. 2 puncte

• Argumentul anterior se extinde natural la toate coloanele matricei $A$; pentru coloana $k$ se alege $X$ astfel încât $x_j = \begin{cases} 1, & \text{dacă } j \neq k \\ -1, & \text{dacă } j = k \end{cases}$. Astfel obţinem că toate elementele matricei $A$ sunt în mulţimea $\{-1, 0, 1\}$. .......................................................................................... 1 punct

• Vom arăta că pe fiecare linie avem un singur element nenul. Dacă prin absurd pe linia $i$ avem $p \geq 2$ elemente nenule, alegem matricea

$$X = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^t$$

definind $x_j = a_{ij}$ dacă $a_{ij} \neq 0$ şi $x_j = 1$ dacă $a_{ij} = 0$ şi obţinem $y_i = p \geq 2$ şi atunci

$$\text{c.m.m.m.c.}\{y_1, y_2, \ldots, y_n\} \neq 1, \quad \text{contradicţie.}$$

.......................................................................................... 1 punct

• Arătăm că pe orice coloană avem un element nenul. Dacă prin absurd $a_{11} = a_{21} = \ldots = a_{n1} = 0$ alegem $x_1 = 2$, $x_2 = \ldots = x_n = 1$ şi atunci $x = 2$, însă

$$y_i = 2a_{i1} + \sum_{j=2}^{n} a_{ij} = L_i \quad (a_{i1} = 0)$$

$$y = \text{c.m.m.m.c.}\{L_1, L_2, \ldots, L_n\} = 1$$

deci $x \neq y$, contradicţie.

În concluzie

pe fiecare linie şi pe fiecare coloană avem câte un singur element nenul, egal cu 1 sau $-1$. ....... 1 punct