Concursul Interjudeţean de Matematică ”Grigore C. Moisil”
Ediţia a XXXIV-a, Baia Mare, 5 – 7 aprilie 2019

Clasa a XII-a

Problema 1. Fie ”$\cdot$” o lege de compoziţie asociativă definită pe mulţimea nevidă M, cu proprietatea că există $m, n \in \mathbb{N}$, cu $2 \leq n < m$, astfel încât $y^m \cdot x^n = y \cdot x$, oricare ar fi $x, y \in M$.

a) Arătaţi că $x^{mn} = x^m$, oricare ar fi $x \in M$.

b) Arătaţi că dacă există în M element neutru în raport cu legea ”$\cdot$”, atunci un element inversabil din M comută cu orice element din M.

Ovidiu T. Pop

Barem

a) Pentru orice $x \in M$ avem
$x^{mn} = x^{m(n-1)} \cdot x^n \cdot x^{m-n} = (x^{n-1})^m \cdot x^n \cdot x^{m-n} = [(x^{n-1})^m \cdot x^n] \cdot x^{m-n} = (x \cdot x^{n-1}) \cdot x^{m-n} = x^n \cdot x^{m-n} = x^m$,
adică egalitatea de la a). .... 2 puncte

Ţinând seama de egalitatea din enunţ, avem succesiv
$x^{mn} \cdot y^{mn} = (x^n)^m \cdot (y^m)^n = y^m \cdot x^n = x \cdot y$, adică $x^{mn} \cdot y^{mn} = x \cdot y, \forall x, y \in M$ .... 2 puncte

Pe de altă parte, dacă $y \in M$, y este inversabil şi y^{-1} este inversul lui, adică $y^{-1} \cdot y = y \cdot y^{-1} = e$, unde e este elemental neutru. Folosind rezultatul de la a) şi egalitatea din enunţ,pentru orice $x \in M$ avem că

$x^{mn} \cdot y^{mn} = x^m \cdot y^m = x^m \cdot (y^n \cdot y^{m-n}) = (x^m \cdot y^n) \cdot y^{m-n} = y \cdot x \cdot \left[y^m \cdot (y^{-1})^n\right] =$
$= y \cdot x \cdot (y^{-1} \cdot y) = y \cdot x \cdot e = y \cdot x,$ .... 2 puncte
adică $x^{mn} \cdot y^{mn} = y \cdot x$,oricare ar fi $x \in M$, $y \in M$ inversabil.
Din (1) şi (2) rezultăcăun element inversabilcomută cu orice element din M. .... 1 punct

Concursul Interjudeţean de Matematică "Grigore C. Moisil"
Ediţia a XXXIV-a, Baia Mare, 5 – 7 aprilie 2019

Clasa a XII-a

Problema 2. Fie $(A, +, \cdot)$ un inel şi $x, y \in A$ astfel încât există $m \in \mathbb{N}^*$ pentru care $(yxy)^m = 0$. Arătaţi că elemntul $1 - y^2xy^2x$ este inversabil.

Gheorghe Râmbu

Barem

a) $y|\ (yxy)^m = 0|\ yx \Rightarrow (y^2x)^{m+1} = 0$, deci $1 - (y^2x)^{m+1} = 1$

$$(1 - y^2x)\left(1 + y^2x + \ldots + (y^2x)^m\right) = \left(1 + y^2x + \ldots + (y^2x)^m\right)(1 - y^2x) = 1$$

deci elementul $1 - y^2x$ este inversabil. ....3 puncte

b)

Dacă $n = 2k$ este par, atunci $1 + y^2x$ este inversabil ....2 puncte

Dacă $n = 2k + 1$ este impar, atunci

$$\left(1 - (y^2x)^2\right)\left(1 + (y^2x)^2 + \ldots + \left((y^2x)^2\right)^k\right) = 1 = \left(1 + (y^2x)^2 + \ldots + \left((y^2x)^2\right)^k\right)\left(1 - (y^2x)^2\right)$$

Atunci $(1 + y^2x)(1 - y^2x) \cdot b = 1 = (1 - y^2x)\, b\,(1 + y^2x)$, deci $1 + y^2x$ este inversabil.

Deci elementele $1 - y^2x$ şi $1 + y^2x$ sunt inversabile

atunci şi $(1 - y^2x)(1 + y^2x) = 1 - y^2xy^2x$ este inversabil ....2 puncte

Concursul Interjudeţean de Matematică "Grigore C. Moisil"
Ediţia a XXXIV-a, Baia Mare, 5 – 7 aprilie 2019

Clasa a XII-a

Problema 3. Aflaţi numerele reale $a_1, a_2, \ldots, a_n \in (0, \infty)$, cu $n \geq 2$, ştiind că $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = n$ şi

$$\int_{e-1}^{e^2-1} \sqrt[n]{\ln(x+a_1) \cdot \ln(x+a_2) \cdot ... \cdot \ln(x+a_n)} dx = e^2.$$

Adrian Boţan

Barem

Din $x \in [e-1, e^2-1]$ şi $a_k > 0$ rezultă $\ln(x+a_k) > 0$, $k = \overline{1,n}$ .... 1 punct

Fie $f, g : [e-1, e^2-1] \to (0, \infty)$ cu $f(x) = \sqrt[n]{\ln(x+a_1) \cdot \ldots \cdot \ln(x+a_n)}$ şi $g(x) = \ln(x+1)$. Avem

$$\int_{e-1}^{e^2-1} g(x)\, dx = e^2$$

.... 1 punct

Deci

$$\int_{e-1}^{e^2-1} f(x)\, dx = \int_{e-1}^{e^2-1} g(x)\, dx \tag{1}$$

.... 1 punct

Dar $f(x) \leq \dfrac{\ln(x+a_1) + \ldots + \ln(x+a_n)}{n} \leq \ln \dfrac{(x+a_1) + \ldots + (x+a_n)}{n} = \ln(x+1) = g(x)$ ... 2 puncte

Cum $f \leq g$ sunt funcţii continue pentru care are loc (1), se obţine $f = g$ .... 1,5 puncte

Deci $x + a_1 = x + a_2 = \ldots = x + a_n \Rightarrow a_k = 1$, $k = \overline{1,n}$ ....0,5 puncte

Concursul Interjudeţean de Matematică "Grigore C. Moisil"
Ediţia a XXXIV-a, Baia Mare, 5 – 7 aprilie 2019

Clasa a XII-a

Problema 4. Determinaţi funcţiile continue $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$, cu proprietatatea că pentru orice $x \in [1, +\infty)$ şi orice $k \in \mathbb{N}$ are loc egalitatea

$$\int_1^x f(t)dt = \int_{x^k}^{x^{k+1}} f(t)dt.$$

Dan Bărbosu

Barem Pentru $k = 1$ ecuaţia devine

$$\int_1^x f(t)\,dt = \int_x^{x^2} f(t)\,dt \tag{1}$$

.... 1 punct

Dacă $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o primitică a funcţiei f,
atunci $F(x^2) + F(1) = 2F(x)\,\forall x \in (1, \infty)$ .... 1 punct

rezultă $f(x) = x \cdot f(x^2)\,\forall x \in [1, \infty)$ .... 1 punct

Fie $g : [1, \infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = xf(x)$ atunci $g(x^2) = g(x)\,\forall x \in [1, \infty)$ .... 1 punct

Atunci $g(\sqrt[2^n]{x}) = g(x)\,\forall x \in [1, \infty)$ .... 1 punct
$g(x) = \lim\limits_{n\to\infty} g(\sqrt[2^n]{x}) = g\left(\lim\limits_{n\to\infty} x^{\frac{1}{2^n}}\right) = g(1) = f(1) = a \in \mathbb{R}$ .... 1 punct

Deci pentru $k = 1$ singurele funcţii care au proprietatea impusă sunt

$$f_a(x) = \frac{a}{x}, x \in [1, \infty)$$

Cum $\int\limits_1^x f_a(t)dt = \int_{x^k}^{x^{k+1}} f_a(t)dt = a \ln x,\ k \in \mathbb{N}^*$
rezultă că funcţiile care au proprietatea din enunţ sunt

$$f_a(x) = \frac{a}{x}, x \in [1, \infty)$$

.... 1 punct