Concursul Interjudeţean de Matematică "Grigore C. Moisil"
Ediţia a XXXIV-a, Baia Mare, 5 – 7 aprilie 2019

Clasa a V-a

Problema 1. Aflaţi numerele naturale $\overline{abc}$ cu proprietatea

$$3^1 + 3^2 + \cdots + 3^n + \overline{cba} = 2019,$$

unde $\overline{abc} = 3^n$, n număr natural nenul.

Mihai Vijdeluc

Barem.
$\overline{abc} \in \{3^5, 3^6\} = \{243, 729\}$ .... 1 punct

Dacă $\overline{abc} = 243$, atunci
$3^1 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5 + 342 = 705$ nu convine .... 3 puncte

Dacă $\overline{abc} = 729$, atunci
$3^1 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5 + 3^6 + 927 = 2019$ .... 3 puncte

Soluţie $\overline{abc} = 729$.

Concursul Interjudeţean de Matematică "Grigore C. Moisil"
Ediţia a XXXIV-a, Baia Mare, 5 – 7 aprilie 2019

Clasa a V-a

Problema 2. a) Arătaţi că fiecare dintre numerele 29 şi 290 se poate scrie ca o sumă de două pătrate perfecte.

b) Arătaţi că pentru orice număr natural n, numărul $a_n = 2^{n+2} \cdot 5^n + 2^n \cdot 5^{n+2}$ poate fi scris ca sumă a două pătrate perfecte.

Ovidiu T. Pop

Barem.

a)

$29 = 2^2 + 5^2$ .... 1 punct

$290 = 1^2 + 17^2$ .... 1 punct

b)

$a_n = 10^n \cdot 29$ .... 1 punct

Dacă n este par, adică $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$, atunci

$a_{2k} = \left(2 \cdot 10^k\right)^2 + \left(5 \cdot 10^k\right)^2$ .... 2 puncte

Dacă n este impar, adică $n = 2k+1$, $k \in \mathbb{N}$, atunci

$a_{2k+1} = \left(17 \cdot 10^k\right)^2 + \left(1 \cdot 10^k\right)^2$ .... 2 puncte

Concursul Interjudeţean de Matematică ”Grigore C. Moisil”
Ediţia a XXXIV-a, Baia Mare, 5 – 7 aprilie 2019

Clasa a V-a

Problema 3. a) Arătaţi că 31 divide numărul $a = 2^{2020} - 1$.
b) Arătaţi că 31 divide suma $S = 2^{2019} + 2^{2018} + 2^{2017} + 2^{2016} + 1$.

Andrei Horvat-Marc

Barem

a) Avem $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 2^5 - 1 = 31$ .... 1 punct

$$a = 2^{2020} - 1 = 1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{2019} = \left(1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4\right) + \ldots + 2^{2015}\left(1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4\right)$$
$$= 31 \cdot \left(1 + 2^5 + \ldots + 2^{2015}\right),$$

deci $31 | a$. .... 2 puncte

b) Avem $31 | (2^{2015} - 1)$ 0,5 punct1

$S = 16 \cdot 2^{2015} + 8 \cdot 2^{2015} + 4 \cdot 2^{2015} + 2 \cdot 2^{2015} + 1$ .... 1 punct

$S = 16\,(\cdot 2^{2015} - 1) + 8 \cdot (2^{2015} - 1) + 4 \cdot (2^{2015} - 1) + 2 \cdot (2^{2015} - 1) + 16 + 8 + 4 + 2 + 1$ ...... 1 punct

$S = 30 \cdot (2^{2015} - 1) + 31$ .... 1 punct

Cum $31 | (2^{2015} - 1)$, se obţine că $31 | S$. .... 0,5 puncte

Concursul Interjudeţean de Matematică "Grigore C. Moisil"
Ediţia a XXXIV-a, Baia Mare, 5 – 7 aprilie 2019

Clasa a V-a

Problema 4. Aflaţi numerele naturale de forma $\overline{abc}$ care îndeplinesc condiţiile: împărţind numerele $\overline{ab}$; $\overline{bc}$, respectiv $\overline{ca}$ la acelaşi număr natural nenul, se obţin câturile b; c, respectiv a şi resturile $a+c$; $a+b$, respectiv $b+c$.

Adrian Bud

Barem

Fie x împărţitorul. Atunci

$\overline{ab} = b \cdot x + a + c \Rightarrow bx = 9a + b - c$
$\overline{bc} = c \cdot x + a + b \Rightarrow cx = 9b + c - a$
$\overline{ca} = a \cdot x + b + c \Rightarrow ax = 9c + a - b$ .... 2 puncte

Prin adunarea relaţiilor se obţine
$x(a+b+c) = 9(a+b+c) \Rightarrow x = 9$ .... 1 punct

Se obţine $a = b = c$ .... 2 puncte

Din $a + a < 9$ se obţine $a \in \{1, 2, 3, 4\}$ .... 1 punct

Se obţine $\overline{abc} \in \{111, 222, 333, 444\}$ .... 1 punct