Concursul Interjudeţean de Matematică "Grigore C. Moisil"
Ediţia a XXXIV-a, Baia Mare, 5 – 7 aprilie 2019

Clasa a VI-a

Problema 1. Rezolvaţi în mulţimea numerelor naturale ecuaţia

$$(x+1)\cdot(y+2)\cdot(z+3)=xyzt^3$$

ştiind că $z \leq y$.

Gheorghe Boroica

Barem

$x \neq 0$, $y \neq 0$, $z \neq 0$, $t \neq 0$ .... 0,5 puncte

Ecuaţia de rescrie sub forma echivalentă $\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{2}{y}\right)\left(1+\frac{3}{z}\right)=t^3$ .... 1 punct

Deduce $t>1$ .... 0,5 puncte

Deduce $(x+1)(y+2)(z+3) \leq 24xyz$ deci $t^3 \leq 24$ .... 1 punct

Deduce $t \in \{1,2\}$, deci $t=2$ .... 1 punct

Ecuaţia devine $\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{2}{y}\right)\left(1+\frac{3}{z}\right)=8$ .... 1 punct

Arată că $x,y,z \geq 2$ nu convine, deci cel puţin unul din numerele x,y,z este 1 .... 1 punct

Tratează cazurile $x=1$, $y=1$, $z=1$ şi obţine soliţiile $(x,y,z) \in \{(2,6,1),(3,4,1),(5,3,1)\}$ .1 punct

Soluţiile sunt

$$(x,y,z,t) \in \{(1,2,3,2),(2,6,1,2),(3,4,1,2),(5,3,1,2)\}$$

Concursul Interjudeţean de Matematică "Grigore C. Moisil"
Ediţia a XXXIV-a, Baia Mare, 5 – 7 aprilie 2019

Clasa a VI-a

Problema 2. Determinaţi numărul natural $n \in \mathbb{N}$ pentru care produsul tuturor divizorilor naturali ai săi este egal cu $2^{36} \cdot 3^{24} \cdot 5^{12}$.

Gheorghe Sfara

Barem

Dacă $n \in \mathbb{N}$ şi k este numărul divizorilor săi naturali, cu $1, d_1, d_2, \ldots n$ divizorii lui n, atunci $(1 \cdot d_1 \cdot d_2 \cdot \ldots \cdot n)^2 = n^k$ .... 1 punct

Deduce $n = 2^x \cdot 3^y \cdot 5^z$ .... 1 punct

$(2^{36} \cdot 3^{24} \cdot 5^{12})^2 = (2^x \cdot 3^y \cdot 5^z)^{(x+1)(y+1)(z+1)}$ .... 2 puncte

Se obţine $x = 3z$, $y = 2z$ .... 1 punct

Se obţine $z\,(3z+1)\,(2z+1)\,(z+1) = 24$ .... 1 punct

Se obţine $x = 3$, $y = 2$, $z = 1$ şi $n = 360$ .... 1 punct

Concursul Interjudeţean de Matematică ”Grigore C. Moisil”
Ediţia a XXXIV-a, Baia Mare, 5 – 7 aprilie 2019

Clasa a VI-a

Problema 3. Fie triunghiul ABC, cu $[AB] \equiv [AC]$ şi $m\left(\widehat{BAC}\right) > 60°$. În semiplanul opus punctului A faţă de dreapta BC se consideră punctele D şi F astfel încât ΔACD şi ΔBEF sunt triunghuri echilaterale, unde $BC \cap AD = \{E\}$.
a) Arătaţi că ΔDEF este isoscel.
b) Determinaţi măsura unghiului $\widehat{BAC}$, dacă $DE \perp DF$.

Adrian Bud

Barem
a) Fie $m\left(\widehat{ABC}\right) = m\left(\widehat{ACB}\right) = x$.

Se obţine $m\left(\widehat{BAD}\right) = 120° - 2x$ .... 0,5 puncte

Se obţine $m\left(\widehat{ABD}\right) = m\left(ADB\right) = 30° + x$ .... 0,5 puncte

Se obţine $m\left(\widehat{DBE}\right) = 30°$ .... 0,5 puncte

Se obţine $m\left(\widehat{FBD}\right) = 30°$ .... 0,5 puncte

Se arată congruenţa $\Delta BED \equiv \Delta BFD$ .... 1 punct

Se obţine ΔDEF isoscel .... 1 punct

b) Se obţine ΔDEF dreptunghic isoscel .... 0,5 puncte

Se obţine $m\left(\widehat{BED}\right) = 105°$ .... 1 punct

Se obţine $m\left(\widehat{ACE}\right) = 15°$ .... 1 punct

Se obţine $m\left(\widehat{BAC}\right) = 150°$ .... 0,5 punct

Concursul Interjudeţean de Matematică "Grigore C. Moisil"
Ediţia a XXXIV-a, Baia Mare, 5 – 7 aprilie 2019

Clasa a VI-a

Problema 4. Fie $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, unghiul ascuţit xOy, cu $m\left(\widehat{xOy}\right) = a^\circ$, $a \in \mathbb{Q}^*$ şi punctele M_1, M_2, ..., M_n situate, în această ordine, pe semidreapta $(Ox$, respectiv N_1, N_2, ..., N_n situate, în această ordine, pe semidreapta $(Oy$, astfel încât $[OM_1] \equiv [M_1N_1] \equiv [N_1M_2] \equiv [M_2N_2] \equiv [N_2M_3] \equiv [M_3N_3] \equiv \ldots \equiv [N_{n-1}M_n] \equiv [M_nN_n]$.

a) Pentru $a = 15$, determinaţi măsura unghiului $\widehat{OM_3N_3}$.

b) Precizaţi perechile $(a, n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ pentru care unghiul $\widehat{OM_nN_n}$ este un unghi drept.

Andrei Horvat-Marc

Barem

Din $[OM_1] \equiv [M_1N_1]$ se deduce că $m\left(\widehat{N_1OM_1}\right) = m\left(\widehat{ON_1M_1}\right) = a^\circ$, deci $m\left(\widehat{N_1M_1M_2}\right) = 2a^\circ$

Din $[N_1M_1] \equiv [M_2N_1]$ se deduce că $m\left(\widehat{N_1M_1M_2}\right) = m\left(\widehat{N_1M_2M_1}\right) = 2a^\circ$, deci $m\left(\widehat{N_2N_1M_2}\right) = 3a^\circ$

Din $[N_1M_2] \equiv [M_2N_2]$ se deduce că $m\left(\widehat{M_2N_1N_2}\right) = m\left(\widehat{N_1N_2M_2}\right) = 3a^\circ$, deci $m\left(\widehat{N_2M_2M_3}\right) = 4a^\circ$

Din aproape în aproape, se obţine că
$m\left(\widehat{N_nM_nx}\right) = 2 \cdot n \cdot a^\circ$, $n \in \mathbb{N}^*$. .... 2 puncte

a) Pentru $a = 15$ şi $n = 3$ se obţine
$m\left(\widehat{OM_3N_3}\right) = 2 \cdot 3 \cdot 15^\circ = 90^\circ$. .... 2 puncte

b) Cum $m\left(\widehat{N_nM_nx}\right) = 2 \cdot n \cdot a^\circ = 90^\circ$, avem $n \cdot a = 45$, deci
$(a, n) \in \{(1, 45), (3, 15), (5, 9), (9, 5), (15, 3)\}$ .... 3 puncte