Concursul Interjudeţean de Matematică "Grigore C. Moisil"
Ediţia a XXXIV-a, Baia Mare, 5 – 7 aprilie 2019

Clasa a VII-a

Problema 1.
a) Arătaţi că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ are loc egalitatea

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \ldots + n \cdot n! = (n+1)! - 1,$$

unde $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$.
b) Arătaţi că

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \ldots + 2019 \cdot 2019! < 2 \cdot 1010^{2020}.$$

Mihai Vijdeluc

Barem

a) Arată $k \cdot k! = (k+1)! - k!$ .... 1 punct

Obţine $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \ldots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$ .... 1 punct

b) Obţine $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \ldots + 2019 \cdot 2019! = 2020! - 1$ .... 1 punct

Obţine
$\sqrt{1 \cdot 2019} < \frac{1+2019}{2} \Rightarrow 1 \cdot 2019 < 1010^2$
$\sqrt{2 \cdot 2018} < \frac{2+2018}{2} \Rightarrow 2 \cdot 2018 < 1010^2$
$\vdots$
$\sqrt{1009 \cdot 1011} < \frac{1009+1011}{2} \Rightarrow 1009 \cdot 1011 < 1010^2$ .... 2 puncte

Prin înmulţirea inegalităţilor se obţine
$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \ldots + 2019 \cdot 2019! < 2 \cdot 1010^{2020}$ .... 2 puncte

Concursul Interjudeţean de Matematică "Grigore C. Moisil"
Ediţia a XXXIV-a, Baia Mare, 5 – 7 aprilie 2019

Clasa a VII-a

Problema 2. Aflaţi tripletele de numere întregi $(x, y, z) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ pentru care au loc simultan egalităţile

$$x^2 - xy + 4yz + xz + 1 = 0 \text{ şi } xy + 2yz + 2xz - 2 = 0.$$

Dorel Duca

Barem

Scăzând cele două ecuaţii obţinem că

$$x^2 - 2xy + 2yz - xz + 3 = 0$$

sau echivalent

$$(x - z)(x - 2y) = -3. \text{ .... 2 puncte}$$

Cum numerele x, y şi z sunt întregi, trebuie să avem

$$\begin{cases} x - z = 1 \\ x - 2y = -3 \end{cases} \qquad (1)$$

sau

$$\begin{cases} x - z = 3 \\ x - 2y = -1. \end{cases} \qquad (2)$$

.... 1 punct

a) In cazul (1) suntem conduşi la $7x^2 + 3x - 10 = 0$ sau echivalent $(x - 1)(7x + 10) = 0$, de unde rezultă $x = 1$ şi apoi $y = 2$ şi $z = 0$. ($x = -7/10 \notin \mathbb{Z}$) .... 2 puncte

b) In cazul (2) suntem conduşi la $7x^2 - 3x + 10 = 0$ sau echivalent $7\left(x - \frac{3}{14}\right)^2 + \frac{1897}{14^2} = 0$, ceea ce este imposibil. .... 2 puncte

Pentru

$$\begin{cases} x - z = -1 \\ x - 2y = 3 \end{cases} \qquad (3)$$

se obţine soluţia $(x, y, z) = (-1, -2, 0)$

$$\begin{cases} x - z = -3 \\ x - 2y = 1. \end{cases} \qquad (4)$$

nu se obţin soluţii întregi.

Aşadar, $(x, y, z) \in \{(1, 2, 0), (-1, -2, 0)\}$.

Concursul Interjudeţean de Matematică "Grigore C. Moisil"
Ediţia a XXXIV-a, Baia Mare, 5 – 7 aprilie 2019

Clasa a VII-a

Problema 3. Fie $ABCD$ un patrulater convex cu $m\left(\widehat{A}\right) = 70°$, $m\left(\widehat{B}\right) = 50°$, $m\left(\widehat{C}\right) = 160°$ şi $[BC] \equiv [CD]$. Determinaţi măsura unghiului $\widehat{BAC}$.

Radu Pop

Barem

Se construieşte
triunghiul echilateral ABE cu E în semiplanul determinat de dreapta BD şi punctul C ....1 punct

Se obţine:

$m\left(\widehat{CBE}\right) = m\left(\widehat{DAE}\right) = 10°$.
ΔBCD isiscel
$m\,(ADB) = 70°$
ΔABD isoscel, cu $[AB] \equiv [BD]$ ....1 punct

ΔDBE isoscel ....1 punct

Fie $BC \cap DE = \{M\}$. Se obţine BM bisectoare în triunghiul isoscel DBE ....1 punct

BM mediatoarea segmentului $[DE]$ ....1 punct

$C \in BM$ şi C se află pe mediatoarea segmentului $[BE]$ ....1 punct

Punctul A se află pe mediatoarea segmentului $[BE]$, deci AC este mediatoarea segmentului $[BE]$, deci AC este bisectoarea unghiului $\widehat{BAE}$, cu $m\,(BAE) = 60°$. Rezultă $m\left(\widehat{BAC}\right) = 30°$ ....1 punct

Concursul Interjudeţean de Matematică "Grigore C. Moisil"
Ediţia a XXXIV-a, Baia Mare, 5 – 7 aprilie 2019

Clasa a VII-a

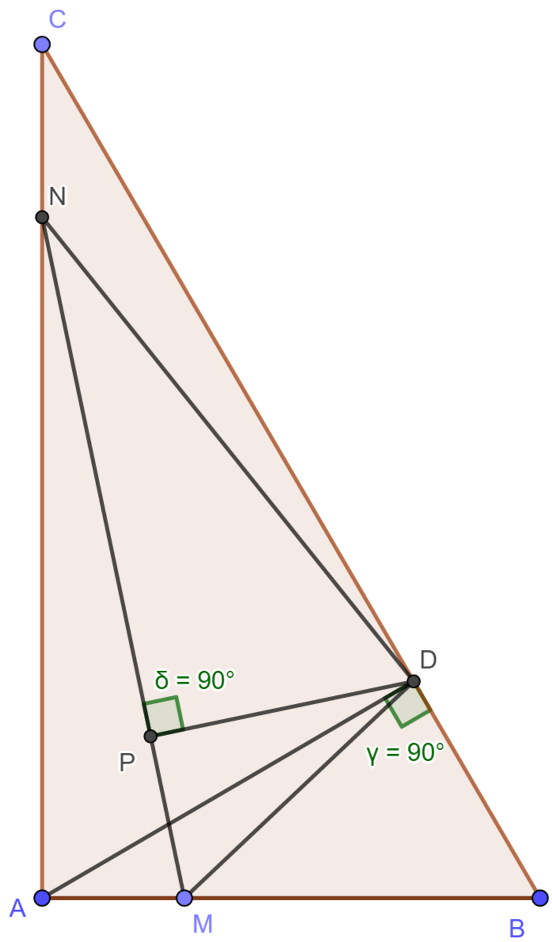
Problema 4. Fie triunghiul ABC, cu $m\left(\widehat{A}\right) = 90°$, şi punctele $D \in (BC)$, $M \in (AB)$, $N \in (AC)$, $P \in (MN)$ astfel încât $AD \perp BC$ şi

$$\frac{AM}{CN} = \sqrt{\frac{PM}{PN}} = \frac{AB}{AC}.$$

Arătaţi că $DP \perp MN$.

Marian Bancoş

Barem



Au loc asemănările $\Delta DAB \simeq \Delta DCA \simeq \Delta ACB$.

Din $\Delta DAB \simeq \Delta DCA$ se obţine $\dfrac{AB}{CA} = \dfrac{DA}{DC}$. Folosind ipoteza $\dfrac{AM}{CN} = \dfrac{AB}{AC}$, rezultă

$$\frac{AM}{CN} = \frac{DA}{DC}.$$

Din $\Delta DAB \simeq \Delta DCA$ se obţine $\widehat{A} \equiv \widehat{C}$. Conform cazului de asemănare L.U.L., rezultă $\Delta MAD \simeq \Delta NCD$, deci $m\left(\widehat{CDN}\right) = m\left(\widehat{ADM}\right) = \alpha$. şi $m\left(\widehat{NDA}\right) = m\left(\widehat{MDB}\right) = \beta$. Dar $\alpha + \beta = m\left(\widehat{ADB}\right) = 90°$, deoarece $AD \perp BC$.

Atunci $m\left(\widehat{MDN}\right)=m\left(\widehat{ADM}\right)+m\left(\widehat{NDA}\right)=\alpha+\beta=90^\circ$,
deci ΔDMN este un triunghi dreptunghic. .... 1 punct

Cum $\frac{DM}{DN}$ este egal cu raportul de asemănare al triunghiurilor asemenea ΔDAB şi ΔDCA, se obţine

$$\frac{DM}{DN}=\frac{AB}{AC}.$$

Atunci triunghiurile DMN şi ABC sunt triunghiuri dreptunghice asemenea. .... 1 punct

Cum $AD\perp BC$ avem

$$\frac{DB}{AB}=\frac{AD}{AC}\Rightarrow DB=\frac{AD\cdot AB}{AC}$$

şi

$$\frac{DC}{AC}=\frac{AD}{AB}\Rightarrow DC=\frac{AD\cdot AC}{AB}.$$

Se obţine

$$\frac{DB}{DC}=\frac{AB^2}{AC^2}$$ .... 1 punct

Din ipoteza problemei avem $\sqrt{\frac{PM}{PN}}=\frac{AB}{AC}$, deci

$$\frac{PM}{PN}=\frac{AB^2}{AC^2}.$$

Atunci

$$\frac{PM}{PN}=\frac{DB}{DC}$$ .... 1 punct

Din $\frac{PM}{PN}=\frac{DB}{DC}$ rezultă că

$$\frac{PM}{NM}=\frac{DB}{BC}\Rightarrow\frac{PM}{DB}=\frac{MN}{BC} \tag{5}$$

Din $\Delta DMN\simeq\Delta ABC$ avem

$$\frac{MN}{BC}=\frac{DM}{AB} \tag{6}$$

Din (5) şi (6) se obţine $\dfrac{PM}{DB}=\dfrac{DM}{AB}$, deci $\dfrac{PM}{DM}=\dfrac{DB}{AB}$. Cum $\widehat{M}\equiv\widehat{B}$, cazul de asemăre L.U.L. ne asigură că $\Delta PMD\simeq\Delta DBA$, deci $\widehat{DPM}\equiv\widehat{ADB}$. Atunci $m\left(\widehat{DPM}\right)=m\left(\widehat{ADB}\right)=90^\circ$. .... 2 puncte

Rezultă $DP\perp MN$ .... 1 punct