Concursul Interjudeţean de Matematică ”Grigore C. Moisil”
Ediţia a XXXIV-a, Baia Mare, 5 – 7 aprilie 2019

Clasa a VIII-a

Problema 1. Fie $p, n \in \mathbb{N}$, cu $p, n \geq 2$ şi

$$a_k = \begin{cases} \sqrt{p+k+\sqrt{2p+2k-1}}, & \text{dacă } k \in \{1, ..., n\} \\ -\sqrt{2n+p+1-k-\sqrt{4n+2p+1-2k}}, & \text{dacă } k \in \{n+1, ..., 2n\}. \end{cases}$$

Care dintre numerele $A = \left(\dfrac{a_1+a_2+...+a_{2n}}{2n}\right)^{2n}$ şi $G = a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_{2n}$ este mai mare? Justificaţi.

Dorel Duca

Barem Pentru fiecare $k \in \{1, ..., n\}$, avem

$a_{2n+1-k} = -\sqrt{p+k-\sqrt{2p+2k-1}}$ .... 2 puncte

şi$(a_k + a_{2n+1-k})^2 = 2$, deci $a_k + a_{2n+1-k} = \sqrt{2}$ .... 1 punct

iar $a_k . a_{2n+1-k} = 1 - p - k$. .... 1 punct

Deducem că
$A = \left(\frac{a_1+a_2+...+a_{2n}}{2n}\right)^{2n} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2n} = \frac{1}{2^n}$ .... 1 punct
şi
$G = (-1)^n p(p+1)...(p+n-1)$. .... 1 punct
Aşadar,
a) dacă n este par, atunci $A < G$,
b) dacă n este impar, atunci $A > 0 > G$. .... 1 punct

Concursul Interjudeţean de Matematică "Grigore C. Moisil"
Ediţia a XXXIV-a, Baia Mare, 5 – 7 aprilie 2019

Clasa a VIII-a

Problema 2. Fie $k \in \mathbb{N}^*$. Arătați că exact una dintre următoarele propoziții este adevărată:
$\mathbb{P}_1$:"Există un număr natural $N > 0$ astfel încât pentru orice număr natural $n \geq N$, are loc inegalitatea $\{\sqrt{n^2+kn}\} < \frac{1}{2}$."
$\mathbb{P}_2$:"Există un număr natural $N > 0$ astfel încât pentru orice număr natural $n \geq N$, are loc inegalitatea $\{\sqrt{n^2+kn}\} > \frac{1}{2}$."
Prin $\{x\}$ s-a notat partea fracționară a numărului real x.

Vlad Robu

Barem Arătăm că dacă k este impar, atunci are loc $\mathbb{P}_1$, iar dacă k este par, atunci are loc $\mathbb{P}_2$........**1p**

Fie $k = 2a+1$, unde $a \in \mathbb{N}$. Vom arăta că

$$n + a < \sqrt{n^2+kn} < n + a + \frac{1}{2},$$

pentru orice $n \geq a^2+1$, de unde obținem ceea ce ne dorim. Prima inegalitate se rescrie echivalent, după ridicare la pătrat, $n^2 + kn > n^2 + 2na + a^2$ sau $(2a+1)n > 2na + a^2$ sau $n > a^2$, adevărat.
A doua inegalitate este echivalentă cu $n^2 + kn < n^2 + a^2 + \frac{1}{4} + 2na + a + n$ sau $0 < \frac{1}{4} + a + a^2$, din nou adevărat. **3p**

Fie acum $k = 2a$, unde $a \in \mathbb{N}^*$. Vom arăta că

$$n + a - \frac{1}{2} < \sqrt{n^2+kn} < n + a,$$

pentru orice $n \geq a^2 - a + 1$, de unde, din nou, obținem ceea ce ne dorim. Prima inegalitate se rescrie echivalent $n^2 + kn > n^2 + a^2 + \frac{1}{4} + 2na - n - a$ sau $n + a > a^2 + \frac{1}{4}$ sau $n > a^2 - a + \frac{1}{4}$, adevărat. A doua inegalitate este echivalentă cu $n^2 + kn < n^2 + 2na + a^2$ sau $a^2 > 0$, din nou adevărat. **3p**

Concursul Interjudeţean de Matematică ”Grigore C. Moisil”
Ediţia a XXXIV-a, Baia Mare, 5 – 7 aprilie 2019

Clasa a VIII-a

Problema 3. Fie M un punct oarecare în interiorul tetraedrului $ABCD$. Notăm cu G_1, G_2, G_3, G_4 centrele de greutate ale tetraedrelor $MBCD$, $MACD$, $MABD$, respectiv $MABC$. Arătaţi că dreptele AG_1, BG_2, CG_3 şi DG_4 sunt concurente.

Nicolae Muşuroia

Barem

Fie E_1 centrul de greutate al triunghiului BCD şi G centrul de greutate al tetraerului $ABCD$. Atunci $G \in (AE_1)$, $\dfrac{GE_1}{AE_1} = \dfrac{1}{4}$ şi $G_1 \in (ME_1)$, $\dfrac{G_1E_1}{OE_1} = \dfrac{1}{4}$. Rezultă $G_1G || MA$ .... 2 puncte

Atunci $AG_1 \cap MG = \{N\}$ şi $\dfrac{MN}{NG} = \dfrac{MA}{G_1G} = \dfrac{E_1A}{E_1G} = 4$ .... 1 punct

Din $\dfrac{MN}{NG} = 4$ rezultă $\dfrac{MN}{MG} = \dfrac{4}{5}$, deci AG_1 trece prin punctul fix N .... 2 puncte

Analog deducem că $N \in BG_2 \cap MG$, $N \in cG_3 \cap MG$, $M \in DG_4 \cap MG$ cu $MN = \dfrac{4}{5}MG$.
Deci $AG_1 \cap BG_2 \cap CG_3 \cap DG_4 = \{N\}$ .... 2 puncte

Concursul Interjudeţean de Matematică ”Grigore C. Moisil”
Ediţia a XXXIV-a, Baia Mare, 5 – 7 aprilie 2019

Clasa a VIII-a

Problema 4. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un paralelipiped dreptunghic cu baza pătrat. Fie punctele $E, F \in [BC]$ astfel încât $[BE] \equiv [EF] \equiv [FC]$, Q mijlocul segementului $[C'D]$ şi $A'F \cap D'E = \{G\}$.
a) Arătaţi că punctele B, G şi Q sunt coliniare.
b) Arătaţi că $3 \cdot BC^2 = 8 \cdot GQ^2$ dacă şi numai dacă paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ este cub.

Adrian Bud

Barem

a) Arată $QF||D'E$ .... 1 punct

Fie $BQ \cap D'E = \{g'\}$. Arată că G' este mijlocul segmentului $[BQ]$ şi $G = G'$ ceea ce implică B, G, Q coliniare .... 2 puncte

b) Notăm $AB = BC = l$ şi $CC' = h$.

Se obţine $CQ = \dfrac{CD'}{2} = \dfrac{\sqrt{l^2 + h^2}}{2}$ .... 1 punct

Se obţine $GQ^2 = \dfrac{5l^2 + h^2}{16}$ .... 1 punct

Din $3BC^2 = 8GQ^2$ se obţine $l = h$, deci $ABCDA'B'C'D'$ este cub........ 2 puncte