Concursul Interjudeţean de Matematică ”Grigore C. Moisil”
Ediţia a XXXIV-a, Baia Mare, 5 – 7 aprilie 2019

Clasa a X-a

Problema 1. Arătaţi că oricare ar fi $m, n \in \mathbb{N}^*$ numărul $a = 2n\,(n+1)$ divide numărul
$$b = (n+1)^{2m} + n^{2m} - 1.$$

Problema 2. Fie $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 3$. Rezolvaţi sistemul

$$\begin{cases} 2^{x_1} + 3^{x_1} = 2 + 3x_2 \\ 2^{x_2} + 3^{x_2} = 2 + 3x_3 \\ \vdots \\ 2^{x_{n-1}} + 3^{x_{n-1}} = 2 + 3x_n \\ 2^{x_n} + 3^{x_n} = 2 + 3x_1 \end{cases}$$

Problema 3. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \setminus \{0,1\} \to \mathbb{R}$ care verifică relaţia
$$f(x) + f\left(1 - \frac{1}{x}\right) = \operatorname{arctg} x,\ \ \forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}.$$
Arătaţi că funcţia $g : \mathbb{R} \setminus \{0,1\} \to \mathbb{R}$ pentru care $g\,(x) = f(x) + f(1-x)$ pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$, este constantă pe fiecare dintre intervalele $(-\infty, 0)$, $(0,1)$, $(1, \infty)$.

Problema 4. Fie funcţia convexă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi triunghiul ABC. Fie $D \in (BC)$, $E \in (AC)$, $F \in (AB)$ şi $AD \cap BE \cap CF = \{P\}$ cu $P \in Int\,(ABC)$.
a) Arătaţi că
$$\sum \frac{DP}{AD} \cdot f\left(\frac{AD}{DP}\right) \geq f\,(3) \ \text{ şi } \sum \frac{AP}{AD} \cdot f\left(\frac{AD}{AP}\right) \geq 2f\left(\frac{3}{2}\right).$$

b) Demonstraţi că
$$\sum \left(1 + \frac{b+c}{a}\right)^n \geq 3^{n+1} \text{ şi } \sum \frac{1}{(b+c)^n} \geq \frac{3^{n+1}}{2^n} \cdot \frac{1}{(a+b+c)^n},$$
unde a, b şi c sunt lungimile laturilor triunghiului ABC şi $n \in \mathbb{N}^*$.

Notă:
Timp de lucru 3 ore.
Toate subiectele sunt obligatorii.