Concursul Interjudeţean de Matematică ”Grigore C. Moisil”
Ediţia a XXXIV-a, Baia Mare, 5 – 7 aprilie 2019

Clasa a XI-a

Problema 1. Calculaţi

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n!)^{p+1}}{(pn)!}\right)^{\frac{1}{n}}\left(\frac{p\left(\sqrt[n]{p}-1\right)+1}{\sqrt[n]{n}}\right)^{n},$$

unde $p \geq 2$ este un număr întreg.

Problema 2. Fie $p, q \in (0, \infty)$ cu $pq < 1$ şi fie şirurile $(x_n)_{n\geq 1}$, $(y_n)_{n\geq 1}$, pentru care

$$0 \leq x_{n+2} - x_n \leq p^{2n+4} + q^{2n+4},\ \ n \geq 1$$

$$y_n = \frac{p^{2n} + p^{2n-2}q^2 + p^{2n-4}q^4 + \ldots + p^2q^{2n-2} + q^{2n}}{p^n \cdot q^n},\ \ n \geq 1.$$

Calculaţi

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}.$$

Problema 3. Fie $n, p, q \in \mathbb{N}$ astfel încât $1 \leq q < p < n$. Dacă există $A \in \mathcal{M}_n(\{0, 1\})$ astfel încât matricea $A \cdot A^t$ are toate elementele de pe diagonala principală egale cu p şi celelalte elemente egale cu q, arătaţi că:

a) $p(p-1) = q(n-1)$;

b) $A \cdot A^t = A^t \cdot A$;

Problema 4. Pentru o matrice coloană $X = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^t \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{Z})$ notăm cu $f(X)$ cel mai mic multiplu comun al numerelor $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Determinaţi matricele $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ cu proprietatea

$$f(X) = f(A \cdot X),\ \forall\ X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{Z}).$$

Notă:

Timp de lucru 3 ore.

Toate subiectele sunt obligatorii.