Concursul Interjudeţean de Matematică ”Grigore C. Moisil”
Ediţia a XXXIV-a, Baia Mare, 5 – 7 aprilie 2019

Clasa a XII-a

Problema 1. Fie ”$\cdot$” o lege de compoziţie asociativă definită pe mulţimea nevidă M, cu proprietatea că există $m, n \in \mathbb{N}$, cu $2 \leq n < m$, astfel încât $x^m \cdot x^n = y \cdot x$, oricare ar fi $x, y \in M$.

a) Arătaţi că $x^{mn} = x^m$, oricare ar fi $x \in M$.

b) Arătaţi că dacă există în M element neutru în raport cu legea ”$\cdot$”, atunci un element inversabil din M comută cu orice element din M.

Problema 2. Fie $(A, +, \cdot)$ un inel şi $x, y \in A$ astfel încât există $m \in \mathbb{N}^*$ pentru care $(yxy)^m = 0$. Arătaţi că elemntul $1 - y^2xy^2x$ este inversabil.

Problema 3. Aflaţi numerele reale $a_1, a_2, \ldots, a_n \in (0, \infty)$, cu $n \geq 2$, ştiind că $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = n$ şi

$$\int_{e-1}^{e^2-1} \sqrt[n]{\ln(x+a_1) \cdot \ln(x+a_2) \cdot \ldots \cdot \ln(x+a_n)}dx = e^2.$$

Problema 4. Determinaţi funcţiile continue $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$, cu proprietatatea că pentru orice $x \in [1, +\infty)$ şi orice $k \in \mathbb{N}$ are loc egalitatea

$$\int_1^x f(t)dt = \int_{x^k}^{x^{k+1}} f(t)dt.$$

Notă:
Timp de lucru 3 ore.
Toate subiectele sunt obligatorii.