Concursul Interjudeţean de Matematică ”Grigore C. Moisil”
Ediţia a XXXIV-a, Baia Mare, 5 – 7 aprilie 2019

Clasa a VII-a

Problema 1.
a) Arătaţi că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ are loc egalitatea

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \ldots + n \cdot n! = (n+1)! - 1,$$

unde $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$.
b) Arătaţi că

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \ldots + 2019 \cdot 2019! < 2 \cdot 1010^{2020}.$$

Problema 2. Aflaţi tripletele de numere întregi $(x, y, z) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ pentru care au loc simultan egalităţile

$$x^2 - xy + 4yz + xz + 1 = 0 \text{ şi } xy + 2yz + 2xz - 2 = 0.$$

Problema 3. Fie $ABCD$ un patrulater convex cu $m\left(\widehat{A}\right) = 70°$, $m\left(\widehat{B}\right) = 50°$, $m\left(\widehat{C}\right) = 160°$ şi $[BC] \equiv [CD]$. Determinaţi măsura unghiului $\widehat{BAC}$.

Problema 4. Fie triunghiul ABC, cu $m\left(\widehat{A}\right) = 90°$, şi punctele $D \in (BC)$, $M \in (AB)$, $N \in (AC)$, $P \in (MN)$ astfel încât $AD \perp BC$ şi

$$\frac{AM}{CN} = \sqrt{\frac{PM}{PN}} = \frac{AB}{AC}.$$

Arătaţi că $DP \perp MN$.

Notă:
Timp de lucru 3 ore.
Toate subiectele sunt obligatorii.