Concursul Interjudeţean de Matematică ”Grigore C. Moisil”
Ediţia a XXXIV-a, Baia Mare, 5 – 7 aprilie 2019

Clasa a VIII-a

Problema 1. Fie $p, n \in \mathbb{N}$, cu $p, n \geq 2$ şi

$$a_k = \begin{cases} \sqrt{p+k+\sqrt{2p+2k-1}}, & \text{dacă } k \in \{1, ..., n\} \\ -\sqrt{2n+p+1-k-\sqrt{4n+2p+1-2k}}, & \text{dacă } k \in \{n+1, ..., 2n\}. \end{cases}$$

Care dintre numerele $A = \left(\dfrac{a_1 + a_2 + ... + a_{2n}}{2n}\right)^{2n}$ şi $G = a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_{2n}$ este mai mare? Justificaţi.

Problema 2. Fie $k \in \mathbb{N}^*$. Arătați că exact una dintre următoarele propoziții este adevărată:
$\mathbb{P}_1$:”Există un număr natural $N > 0$ astfel încât pentru orice număr natural $n \geq N$, are loc inegalitatea $\{\sqrt{n^2+kn}\} < \frac{1}{2}$.”
$\mathbb{P}_2$:”Există un număr natural $N > 0$ astfel încât pentru orice număr natural $n \geq N$, are loc inegalitatea $\{\sqrt{n^2+kn}\} > \frac{1}{2}$.”
Prin $\{x\}$ s-a notat partea fracționară a numărului real x.

Problema 3. Fie M un punct oarecare în interiorul tetraedrului $ABCD$. Notăm cu G_1, G_2, G_3, G_4 centrele de greutate ale tetraedrelor $MBCD$, $MACD$, $MABD$, respectiv $MABC$. Arătaţi că dreptele AG_1, BG_2, CG_3 şi DG_4 sunt concurente.

Problema 4. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un paralelipiped dreptunghic cu baza pătrat. Fie punctele $E, F \in [BC]$ astfel încât $[BE] \equiv [EF] \equiv [FC]$, Q mijlocul segementului $[C'D]$ şi $A'F \cap D'E = \{G\}$.
a) Arătaţi că punctele B, G şi Q sunt coliniare.
b) Arătaţi că $3 \cdot BC^2 = 8 \cdot GQ^2$ dacă şi numai dacă paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ este cub.

Notă:
Timp de lucru 3 ore.
Toate subiectele sunt obligatorii.