Concursul Interjudeţean de Matematică ”Grigore C. Moisil”
Ediţia a XXXIV-a, Baia Mare, 5 – 7 aprilie 2019

Clasa a IX-a

Problema 1. Demonstraţi că n numere reale diferite două câte două se află în progresie aritmetică dacă şi numai dacă mulţimea sumelor a câte două din cele n numere conţine exact $2n-1$ elemente.

Problema 2. Pentru un număr natural fixat $n \geq 2$, notăm cu F_n mulţimea funcţiilor $f : \{1, 2, \ldots, n\} \rightarrow \{1, 2, \ldots, n\}$ cu proprietatea că $f(i) + f(j) = n + 1$ dacă $i + j = n + 1$ pentru $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.
a) Determinaţi numărul elementelor mulţimii F_n.
b) Câte funcţii din F_n sunt surjective?

Problema 3. Se consideră patrulaterul inscriptibil $ABCD$ cu diagonalele perpendiculare şi $AB = 1$. Fie $r > 0$ raza cercului înscris în triunghiul ABD.
a) Arătaţi că $CD^2 \geq 16r^2 - 1$.
b) Determinaţi aria patrulaterului $ABCD$, dacă $CD^2 = 16r^2 - 1$.

Problema 4. Fie în plan punctele A, B, C distincte şi necoliniare. Arătaţi că dacă există un punct X în plan astfel încât

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{a}{c} - \frac{b}{c} - \frac{c}{b}\right)\overrightarrow{XA} + \left(\frac{b}{a} + \frac{b}{c} - \frac{a}{c} - \frac{c}{a}\right)\overrightarrow{XB} + \left(\frac{c}{a} + \frac{c}{b} - \frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right)\overrightarrow{XC} = \overrightarrow{0},$$

atunci triunghiul ABC este echilateral, notaţiile fiind cele uzuale.

Notă:
Timp de lucru 3 ore.
Toate subiectele sunt obligatorii.